

*CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE
POLIEDROS DE CARAS
TRIANGULARES*

*Alejandro G. Sherar
2015*

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS
TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Antecedentes:

- *Exámen final de Electromagnetismo (~1987)*
- *Tesis doctoral: “Descargas Eléctricas Capilares Pulsadas en Xenon” – IFAS - UNCPBA – 1998.*
- *Ingreso al SIID (ex SENID) – ARA (04/2007). Tema: “Obtención de capacidades en tecnologías Stealth”, en la Div. Radiopropagación.*
- *PIDDEF: “TOR-1012” (SIID, 2010-2012).*
- *División “Detección” - DIIV (ex-SIID) desde 01/2015.*
- *???*

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS
TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Proyecto TOR-1012 : Tecnologías de Ocultamiento
de Radar (2010-2012)

- *Objetivo: Desarrollar una herramienta de software para calcular la dispersión EM en objetos de forma arbitraria (principalmente buques), y analizar formas de reducción de su RCS.*
- *Método de Momentos para las ecuaciones EFIE.*
- *El resultado final es el campo dispersado $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.*
- *Como resultado intermedio se obtiene el campo de corriente superficial inducida $\mathbf{J}(\mathbf{r}_s)$.*

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

El campo EM penetra en la superficie del dispersor una distancia efectiva que se conoce como espesor “skin”, que puede aproximarse por la conocida fórmula:

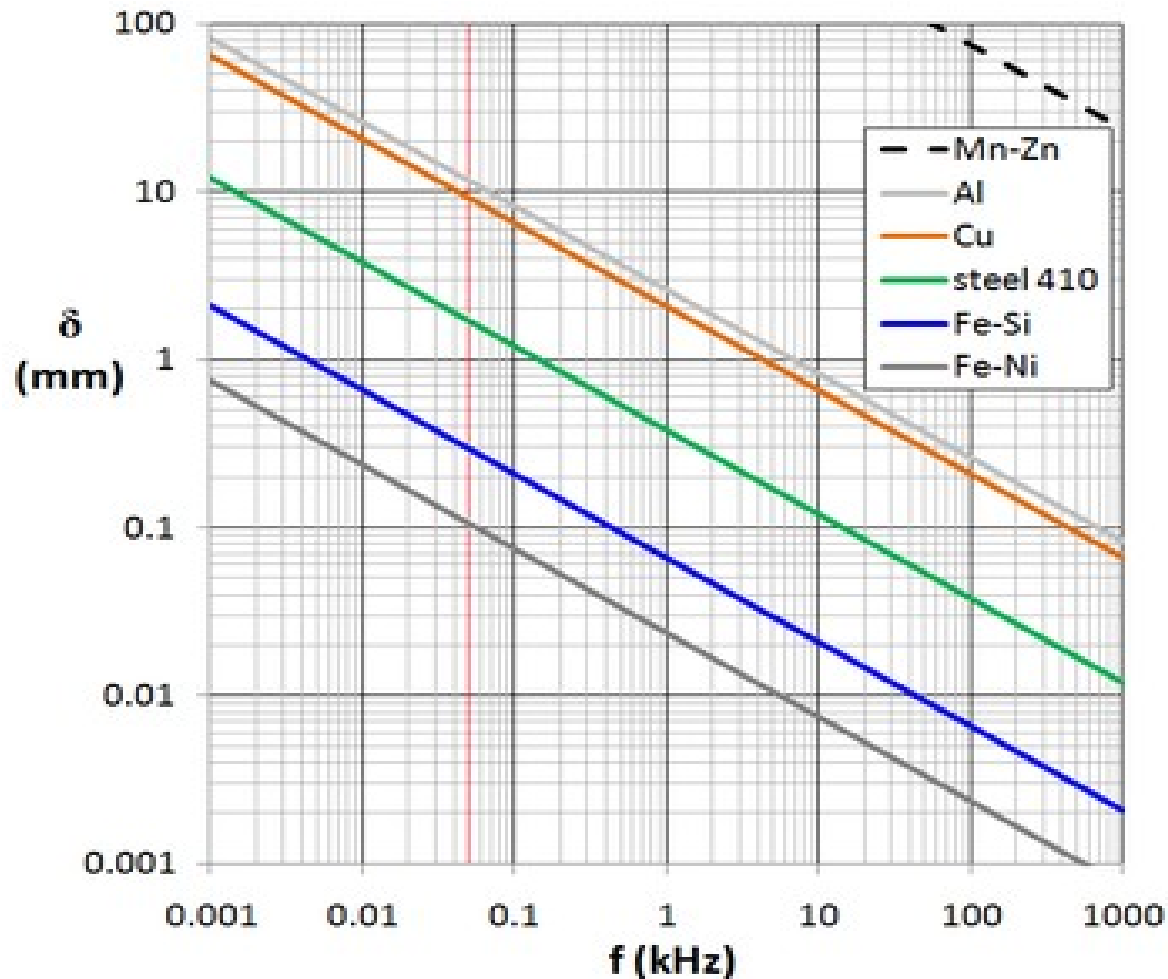
$$d_{skin} = \sqrt{2/(\mu \sigma \omega)}$$

Para materiales como Fe y Al, y en los rangos de frecuencias empleadas en los radares ($f=1-30$ Ghz) el espesor resulta ser del orden de los micrones.

Por lo tanto se puede considerar que la dispersión afecta solamente la superficie del objeto dispersor, y las densidades de carga y de corriente se definen como distribuciones superficiales.

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Espesor “skin” en situaciones variadas (Wikipedia).



CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

*Para buenos conductores la conductividad σ se puede considerar “infinita”. Aún con corriente inducida \mathbf{J} finita, la componente **superficial** del campo \mathbf{E} es despreciable:*

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) / \sigma = \mathbf{E}_s(\mathbf{r})_{\text{resultante}} \sim \mathbf{0} \quad (\text{ley de Ohm})$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r})_{\text{resultante}} = \mathbf{E}_s(\mathbf{r})_{\text{inc.}} + \mathbf{E}_s(\mathbf{r})_{\text{disp.}} \sim \mathbf{0}$$

Condición de contorno para conductores perfectos:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r})_{\text{inc.}} = -\mathbf{E}_s(\mathbf{r})_{\text{disp.}}$$

*CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS
TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015*

*A partir de las ecuaciones de Maxwell y empleando el Gauge de Lorenz se obtiene la ecuación del campo **E**:*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = - \nabla \varphi(\mathbf{r},t) - \partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t) / \partial t$$

*donde φ es el potencial escalar y **A** el potencial vector.*

Para poder resolver sobre la superficie del dispersor a esta ecuación de punto se la debe convertir en una ecuación integral.

*CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS
TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015*

Se puede pasar al dominio de la frecuencia asumiendo que todos los procesos son lineales, y todas las cantidades físicas tienen la misma dependencia temporal:

$$X(\mathbf{r},t) = X(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$$

Por lo que:

$$\partial X(\mathbf{r},t) / \partial t = i\omega X(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$$

En particular, la ecuación de continuidad queda:

$$\rho(\mathbf{r}) = (i/\omega) \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS
TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Los potenciales se calculan con integrales de Poisson:

$$\varphi(\mathbf{r}) = 1 / (4\pi\epsilon) \iint G(\mathbf{r},\mathbf{r}') [(\iota/\omega) \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')] da'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu / (4\pi) \iint G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') da'$$

Tanto la densidad de carga $(\iota/\omega) \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')$, como la densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ son superficiales, y $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ es la función de Green: $\exp(-\iota k |\mathbf{r}'-\mathbf{r}|) / |\mathbf{r}'-\mathbf{r}|$, $k = 2\pi/\lambda$.

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS
TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Con todo esto, la EFIE queda:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})_{disp} = - \iint_S \left[\frac{1}{4\pi\epsilon\omega} \nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} \mu\omega \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] da'$$

Para avanzar se requieren:

- *una expresión para la superficie S del dispersor*
- *una expresión para el campo superficial $\mathbf{J}(\mathbf{r})$.*

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS
TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Discretización

La superficie del dispersor se aproximará mediante un poliedro de caras triangulares.

La corriente superficial se desarrollará como una suma de funciones de Rao-Wilton-Glisson.

Las funciones de RWG se definen sobre pares de triángulos, y cumplen automáticamente la ecuación de continuidad.

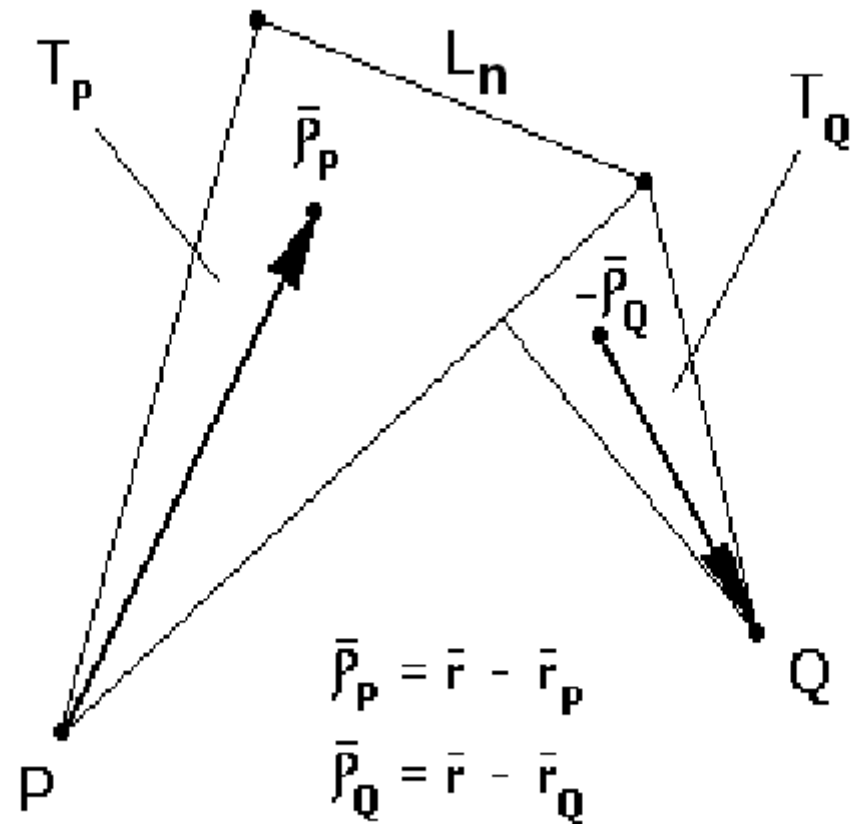
CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Funciones de Rao-Wilton-Glisson

$$(L_n/2A_P) \boldsymbol{\rho}_P \quad \text{si } \mathbf{r} \in T_P$$

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = -(L_n/2A_Q) \boldsymbol{\rho}_Q \quad \text{si } \mathbf{r} \in T_Q$$

$$0, \quad \text{si } \mathbf{r} \notin T_P \text{ y } \mathbf{r} \notin T_Q$$



CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Desarrollo de un campo superficial $\mathbf{J}(\mathbf{r})$

Sea \mathbf{S} un poliedro con NT caras triangulares T_k , que aproxima al objeto dispersor. Dentro de cada cara el vector $\mathbf{J}_k(\mathbf{r})$ se calcula con la suma:

$$\mathbf{J}_k(\mathbf{r}) = \sum_n J_n \mathbf{f}_{nk}(\mathbf{r}), \quad n=a,b,c$$

Los vectores $\mathbf{f}_{nk}(\mathbf{r})$ son las funciones de RWG para la arista n del triángulo T_k .

Los escalares J_n son parámetros complejos que identifican la magnitud y fase del vector que atraviesa la arista n .

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Formalmente, el campo sobre toda la superficie se define como la suma de $\mathbf{J}_k(\mathbf{r})$ sobre el número total de triángulos:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_k \sum_n \mathbf{J}_{kn}(\mathbf{r}), \quad k=1, \dots, NT, \quad n=a, b, c \text{ (3 aristas).}$$

Cuando se emplea esta expresión en integrales sobre una superficie es equivalente a la expresión sumando sobre todas las aristas:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_n \mathbf{J}_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}), \quad n=1, \dots, NA \text{ (Nro. de aristas)}$$

Donde se ha omitido el índice k ya que un punto \mathbf{r} corresponde a un único triángulo T_P ó T_Q . Fijando \mathbf{r} se está seleccionando el triángulo de trabajo y las tres aristas donde $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$ no se anula.

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Coordenadas símplices para dominios RWG

$$\mathbf{U}_{2P} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_P \quad \mathbf{U}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad \boldsymbol{\rho}_P = \mathbf{r} - \mathbf{r}_P \quad \boldsymbol{\rho}_Q = \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q$$

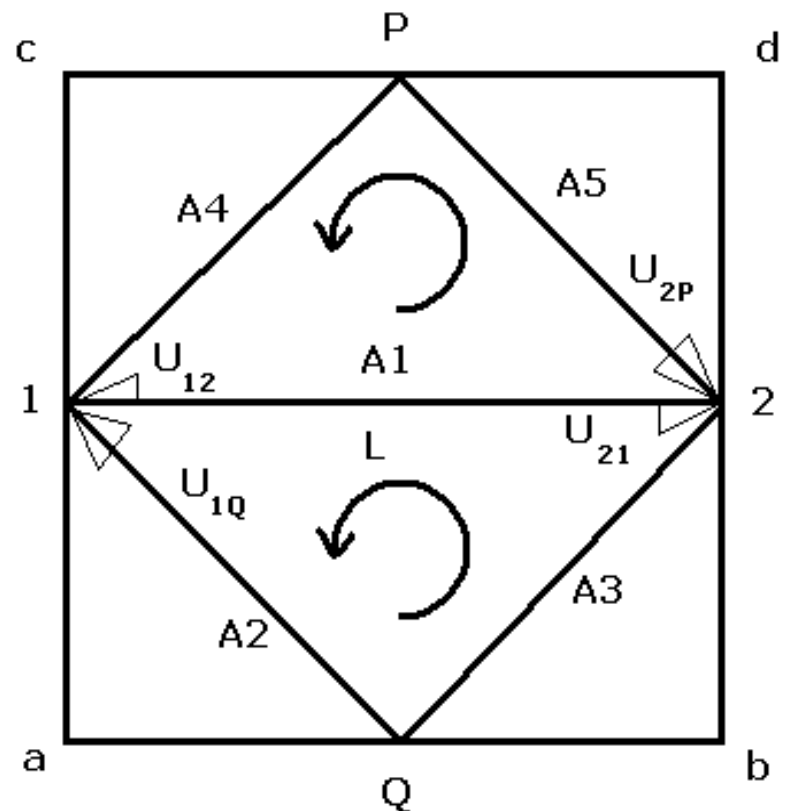
$$\mathbf{U}_{1Q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_Q \quad \mathbf{U}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{r} \in T_P \quad \boldsymbol{\rho}_P = \xi_1 \mathbf{U}_{2P} + \xi_2 \mathbf{U}_{12}$$

$$0 < \xi_1 < 1, \quad 0 < \xi_2 < \xi_1$$

$$\mathbf{r} \in T_Q \quad \boldsymbol{\rho}_Q = \eta_1 \mathbf{U}_{1Q} + \eta_2 \mathbf{U}_{21}$$

$$0 < \eta_1 < 1, \quad 0 < \eta_2 < \eta_1$$



CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

El diferencial de área del triángulo escrito en coordenadas simples queda:

$$da' = d\mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{u}_2$$

$$= d\xi_1 \mathbf{U}_1 \cdot d\xi_2 \mathbf{U}_2$$

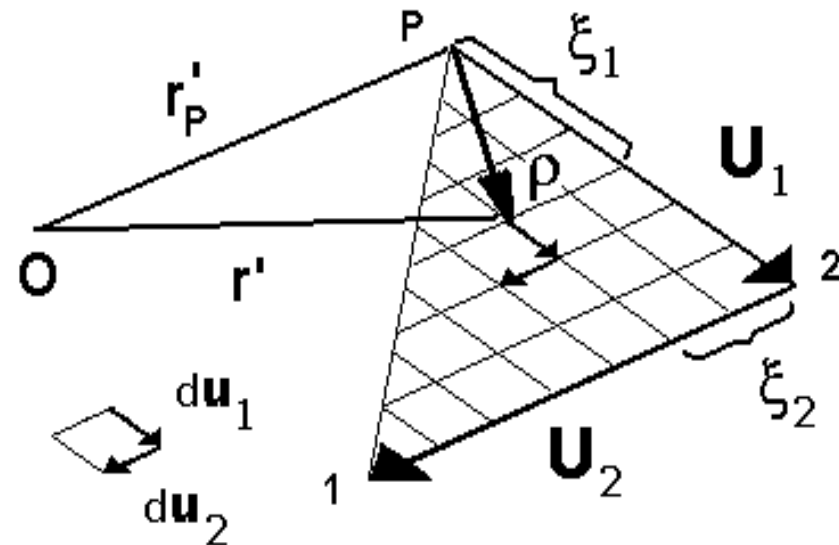
$$A_T = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2 \int_0^1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 d\xi_1$$

$$\int_0^{\xi_1} d\xi_2 = \xi_1$$

$$\int_0^1 \xi_1 d\xi_1 = 1/2$$

$$A_T = 1/2 [\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2]$$

$$da' = 2A_T d\xi_2 d\xi_1$$



CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Aplicación al cálculo del campo dispersado $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

Con: $\alpha = 1/(4\pi\epsilon\omega)$ y $\beta = i\mu\omega/(4\pi)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})_{disp} = - \iint_S [\alpha \nabla \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \beta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}')] da'$$

Y:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \sum_n J_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}'), \quad n=1, \dots, NA \quad y \quad \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') = \pm (L_n / 2 A_T) \boldsymbol{\rho}_T(\mathbf{r}')$$

$$\text{siendo: } \boldsymbol{\rho}_T(\mathbf{r}') = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T) = \xi_1 \mathbf{U}_1 + \xi_2 \mathbf{U}_2 \quad y \quad \nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') = \pm L_n / A_T$$

Se define: $R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \Rightarrow G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(R) = \exp(-i k R)/R,$

$$\nabla G(R) = - (1/R + i k) G(R) (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) / R \quad \text{con: } \nabla' G(R) = -\nabla G(R)$$

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

La expresión del campo dispersado en coordenadas símplices queda:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}_A)_{disp} \sim & \alpha \iint_{TP} [(1/R + i k) G(R) \mathbf{R} / R] [2 \sum_n J_n(L_n/2A_P)] du_2 du_1 \\
 & - 2 \alpha \sum_n J_n L_n \iint_{TQ} [(1/R + i k) G(R) \mathbf{R} / R] d\eta_2 d\eta_1 \\
 & - \beta \iint_{TP} G(R) [\sum_n J_n(L_n/2A_P) (\xi_1 \mathbf{U}_1 + \xi_2 \mathbf{U}_2)] du_2 du_1 \\
 & + \beta \sum_n J_n L_n \iint_{TQ} G(R) [\eta_1 \mathbf{U}_3 - \eta_2 \mathbf{U}_2] d\eta_2 d\eta_1
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_T = \mathbf{r}'_T - \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{R} = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_A) = (\mathbf{r}'_T - \mathbf{r}_A) + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_T) = \mathbf{R}_T + \boldsymbol{\rho}_T(\mathbf{r}')$$

$$\text{para CL : } |\boldsymbol{\rho}_T| \ll |\mathbf{R}_T| = R_T \Rightarrow R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_A| \sim R_T$$

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

En el caso de campo lejano aproximaremos factores sólo para la amplitud, y notando que $R_P \sim R_Q = R_n$ y $\lambda \ll R_n = |\mathbf{r}'_n - \mathbf{r}_A|$:

$$G(R) \sim G_n(R) = \exp(-i k R) / R_n$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_A)_{disp} \sim 2 i k \alpha \sum_n \mathbf{J}_n \mathbf{L}_n \mathbf{R}_n / R_n \cdot [\iint_{TP} G_n(R) d\xi_2 d\xi_1 - \iint_{TQ} G_n(R) d\eta_2 d\eta_1] +$$

$$+ \beta \sum_n \mathbf{J}_n \mathbf{L}_n \cdot$$

$$\cdot [\mathbf{U}_3 \iint_{TQ} G_n(R) \eta_1 d\eta_2 d\eta_1 - \mathbf{U}_2 \iint_{TQ} G_n(R) \eta_2 d\eta_2 d\eta_1$$

$$- \mathbf{U}_1 \iint_{TP} G_n(R) \xi_1 d\xi_2 d\xi_1 - \mathbf{U}_2 \iint_{TP} G_n(R) \xi_2 d\xi_2 d\xi_1]$$

NOTA: Conviene eliminar explícitamente la componente radial en cada sumando:

$$\mathbf{E}_n^* = \mathbf{E}_n - \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{R}_n / R_n$$

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Límite de una superficie suave ideal

Considerando el caso $\lambda \gg L_n$ (triángulo = diferencial de área):

$$G_n(R) \sim G(R_n) \Rightarrow \sum_n L_n \mathbf{R}_n / R_n G(R_n) (\iint d\xi_2 d\xi_1 - \iint d\xi_2 d\xi_1) = 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_A)_{disp} \sim \beta \sum_n \sum_n L_n G(R_n) .$$

$$. \{ (\mathbf{U}_3 - \mathbf{U}_1) \int_0^1 \xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 d\xi_1 - 2 \mathbf{U}_2 \int_0^1 \int_0^{\xi_1} \xi_2 d\xi_2 d\xi_1 \}$$

El término radial en α (del potencial escalar) se cancela.

Que no se anule para $L_n \geq \lambda$ es un error originado en la discretización.

La resta de números semejantes contribuye al error de redondeo, contaminando la componente transversal de manera irremediable => se puede eliminar siempre, aún en superficies poliedras, con el argumento de **consistencia**.

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Las integrales resultan:

$$\int_0^1 \xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 d\xi_1 = 1/3 \quad \text{y} \quad \int_0^1 \int_0^{\xi_1} \xi_2 d\xi_2 d\xi_1 = 1/6$$

Y se observa que:

$$[\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_3]_n = [\mathbf{r}'_Q - \mathbf{r}'_P]_n \equiv \mathbf{D}_n$$

\mathbf{D}_n es el vector que va del vértice P al vértice Q en cada dominio y su módulo depende de la “curvatura” local.

El resultado es una suma vectorial sobre todas las aristas de dipolos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_A)_{disp} \sim -(\beta/3) \sum_n \mathbf{J}_n G(R_n) L_n \mathbf{D}_n \quad (\text{para } L_n \ll \lambda \ll R_n)$$

La amplitud de cada dipolo elemental es proporcional a la corriente \mathbf{J}_n .

$G(R_n)$ da la dependencia de la fase y de la amplitud con la distancia R_n .

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Cuando el objeto es pequeño comparado con la distancia a la antena, se tiene : $R_n \sim R_0$ para todo n , y queda:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_A)_{disp} \sim - (\beta / 3) G(R_0) [\sum_n J_n L_n \mathbf{D}_n]$$

Si todas las corrientes valieran lo mismo (p. ej. $J_n = 1$), y la superficie es suave el módulo del corchete se aproxima al doble del área total del dispersor.

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Finalmente, para el campo lejano dispersado:

$$\lambda, L_n \ll R_n = |\mathbf{r}'_n - \mathbf{r}_A|$$

la expresión “consistente” para superficies poliedras, resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}_A)_{disp} \sim & -i \mu \omega / (4\pi) \sum_n \mathbf{J}_n L_n \cdot \\ & \cdot \{ \mathbf{U}_1 \iint_{TP} G_n(R) \xi_1 d\xi_2 d\xi_1 - \mathbf{U}_3 \iint_{TQ} G_n(R) \eta_1 d\eta_2 d\eta_1 \\ & + \mathbf{U}_2 [\iint_{TQ} G_n(R) \eta_2 d\eta_2 d\eta_1 + \iint_{TP} G_n(R) \xi_2 d\xi_2 d\xi_1] \} \end{aligned}$$

Siendo:

$$G_n(R) = \exp(-i k R) / R_n \quad y \quad R = |\mathbf{R}_T + \boldsymbol{\rho}_T(\mathbf{r}')|, \quad \mathbf{R}_T = \mathbf{r}'_T - \mathbf{r}_A$$

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Cuando se desconocen las J_n se integra en cada dominio de RWG la expresión:

$$E_m = \iint_{TP+TQ} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})_{inc.} da \quad (m=1,2,\dots,NA)$$

Al multiplicar por las mismas funciones $f_m(r)$ (Galerkin) se selecciona automáticamente la componente superficial y se puede aplicar la condición de contorno:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r})_{inc.} = -\mathbf{E}_s(\mathbf{r})_{disp.}$$

En coordenadas simples queda:

$$E_m = L_m \left[\int_0^1 \int_0^{\xi_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) (\xi_1 \mathbf{U}_1 + \xi_2 \mathbf{U}_2) d\xi_2 d\xi_1 + \int_0^1 \int_0^{\xi_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) (\eta_1 \mathbf{U}_3 - \eta_2 \mathbf{U}_2) d\eta_2 d\eta_1 \right]$$

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

La misma operación aplicada al otro miembro da:

$$\iint_{S_m} f_m(\mathbf{r}) \left\{ \iint_{TP+TQ} [\alpha \nabla \cdot G(R) \nabla' \cdot \mathbf{J}_n(\mathbf{r}') + \beta G(R) \mathbf{J}_n(\mathbf{r}')] da' \right\} da$$

Integrando por partes y aplicando el teorema de Green a una superficie cerrada, puede escribirse en la forma:

$$\mathbf{E}_m = \sum_n \mathbf{J}_n Z_{mn} \quad (m, n = 1, 2, \dots, NA)$$

definiendo:

$$Z_{mn} = \beta L_n \iint_{S_m} \iint_{S_n} G(R) (1/2A_T) [\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') - (1/k^2) \nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')] da' da$$

que es un coeficiente de la matriz de impedancias.

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

La expresión en coordenadas símplexes es (para $m, n = 1, \dots, NA$):

$$Z_{mn} = (ik\zeta/4) L_m L_n .$$

$$\cdot \int_0^1 \int_0^{\xi_1} \int_0^1 \int_0^{\eta_1} G(R) [(\xi_1 \mathbf{U}_1 + \xi_2 \mathbf{U}_2) \cdot (\eta_1 \mathbf{U}_3 - \eta_2 \mathbf{U}_2) - 1/k^2] d\eta_2 d\eta_1 d\xi_2 d\xi_1$$

$$0 < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < \xi_1, \quad \text{para el recorrido de } J_n$$

$$0 < \eta_1 < 1, 0 < \eta_2 < \eta_1, \quad \text{para el recorrido de } E_m$$

Debido al denominador de $G(R)$ y a que en cada integración se recorre todo el dominio, se producen singularidades de panel común, de arista común y de vértice común.

Todo tipo de singularidad puede removerse mediante la transformación de Duffy.

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Procedimiento para eliminar singularidades

Definir las coordenadas relativas: $v_1 = \eta_1 - \xi_1$ y $v_2 = \eta_2 - \xi_2$

Esto requiere cambiar el orden de integración.

Se escribe el denominador de $G(R)$ en la forma: $|r - r'| = \omega \Gamma(x)$.

La transformación de Duffy relaciona ω y x con v_1 y v_2 .

Convierte triángulos en rectángulos de manera similar a como la transformación de cartesianas a polares convierte sectores circulares (x,y) , en rectángulos (ρ,θ) .

El jacobiano de la transformación de Duffy es ω , y se cancela con el denominador $[\xi,\eta]$, eliminando así la singularidad.

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Expresiones finales de Z_{mn}

Para panel común se obtienen expresiones proporcionales a:

$$Z_{mn} \sim (1/8) ik\zeta/\pi L_m L_n \int_0^1 F(x)/\Gamma(x) dx$$

$$F(x) = \sum_{n=0,4} K_n(x) \int_0^1 \omega^n \exp[-ik\omega \Gamma(x)] d\omega$$

$K_n(x)$ son polinomios en x , con coeficientes que surgen al calcular las integrales definidas.

Las integrales en ω pueden resolverse analíticamente.

Las integrales en x que deben resolverse e forma numérica.

Para las singularidades de arista común quedan integrales dobles, y para las de vértice común triples.

CAMPOS SUPERFICIALES SOBRE POLIEDROS DE CARAS TRIANGULARES - A. G. Sherar - 2015

Bibliografía

- [1] Sadasiva M. Rao, Donald R. Wilton, and Allen W. Glisson, “Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape”, *IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION* – VOL. AP-30 NO. 3, MAY 1982.
- [2] Randy Bancroft, “Understanding Electromagnetic Scattering Using the Moment Method”, Artech House, Inc., 1996.
- [3] Andrew F. Peterson, Scott. L. Ray, Raj Mittra, “Computational Methods for Electromagnetics”, IEEE Press, 1998.
- [4] Eugene F. Knott, John F. Shaeffer, Michael T. Tuley, “Radar Cross Section”, Second edition, Scitech Publishing Inc., 2004.
- [5] D. J. Taylor, “Accurate and Efficient Numerical Integration of Weakly Singular Integrals in Galerkin EFIE Solutions”, *IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION*, VOL. 51, NO. 7, JULY 2003.
- [6] A. G. Sherar, “Implementación del MoM para el cálculo de la RCS en objetos PEC - 2010”, anexo al ITA PIDDEF 021/10, primera etapa (2010-2011), DIIV, 2011.